

## **Sinteza lucrării: iulie 2008**

**Proiectul de cercetare nr. 24/28.09.2007**

***„Grupuri, grupuri cuantice, coringuri si teoria reprezentării”***

**Director: prof. dr. Gigel Militaru**

**Rezumat:** In 2008 au fost publicate in reviste cotate ISI 3 articole, a fost acceptat si e in curs de publicare in acest an in revista codata ISI un alt articol, au fost trimise spre publicare 6 articole si sunt in faza de finalizare alte 4 articole stiintifice. Toate mentioneaza finantarea din contractul 24/28.07.2007 si sunt parte a obiectivelor asumate in proiectul de cercetare. Au fost achizitionate monografiile stiintifice ale unor mari edituri internationale in valoare totala de 7334 lei si a fost demarat incepind cu 1 octombrie 2007 un seminar stiintific de doua ore/saptaminal coordonat de directorul de proiect. Tinerii studenti ai grantului au facut trei stagii de cercetare: cite o luna la Universitatea din Pittsburgh (Ana Agore si Dragos Fratila) si de 9 zile la Institutul Fourier (Dragos Fratila).

### **Cuprins**

Obiectivele stiintifice ale proiectului din etapa 2008:	1
Realizarile stiintifice: articole publicate in 2008:	2
Detalierea studiului intreprins	3
Concluzii:	6

### **Obiectivele stiintifice ale proiectului in etapa 2008 conform contractului :**

- Produs general la nivel de algebre si grupuri cuantice: probleme de structura si clasificare.
- Demararea proiectului pentru scrierea unei monografii *Introducere in algebra necomutativa* in coordonarea directorului de proiect care sa fie trimisa spre publicare la o editura de prestigiu din strainatate; termen de finalizare al monografiei este sfirsitul anului 2009 inceputul anului 2010.
- Investigarea polinoamele Macdonald din punctul de vedere al teoriei reprezentarii. Constructii topologice de algebre Hecke.
- Clase speciale de coalgebre (probleme de tip splitting) si coringuri.

## **Realizari: Articole stiintifice publicate de membrii proiectului de cercetare.**

### **Articole publicate in reviste cotate ISI:**

- [1] B. Ion, *Standard bases for affine parabolic modules and nonsymmetric Macdonald polynomials*, J. Algebra, 319 (2008), 3480—3517.
- [2] M.C. Iovanov, J. Vercauteren, *Cofrobenius corings and adjoint functors*, Journal of Pure and Applied Algebra, Vol. 212 (2008), Issue 9, 2011-2146.
- [3] M.C. Iovanov, *Frobenius Extensions of Corings*, Communications in Algebra 36 (2008), no. 3, 869-892.

### **Articole acceptate spre publicare in reviste cotate ISI:**

- [1] M.C. Iovanov, C. Nastasescu, B. Torrecillas-Jover, *The Dickson Subcategory Splitting Conjecture for Pseudocompact Algebras*, va aparea, Journal of Algebra, vol. 320 (2008).

### **Articole trimise spre publicare:**

- [1] B. Ion, *Generalized exponents of small representations. I: Prologue*. 31 pg.
- [2] A. L. Agore, A. Chirvasitu, B. Ion, G. Militaru: *Bicrossed products for finite groups*, trimisa spre publicare, noiembrie 2007.
- [3] M. C. Iovanov, "Generalized Frobenius Algebras and the Theory of Hopf Algebras", trimisa spre publicare.
- [4] M. C. Iovanov, "When does the Rational Torsion Split off for Finitely Generated Modules"
- [5] M. Beattie, M. C. Iovanov, S. Raianu, "The antipode of a dual quasi-Hopf algebra with integrals is bijective"
- [6] A.L. Agore, G. Militaru, *Crossed Product of groups. Applications*.

### **Articole in curs de finalizare:**

- [1] B. Ion, *Generalized exponents of small representations. II: Fourier coefficients*.
- [2] B. Ion, *Generalized exponents of small representations. III: Quasi-symmetric functions*.
- [3] M.C. Iovanov, *Integrals in Algebra*, in curs de finalizare.
- [4] A. L. Agore, G. Militaru, *Unifying crossed and bicrossed products*, in curs de finalizare.
- [5] A. L. Agore, D. Fratila, *Crossed products of cyclic groups*, in curs de finalizare.

## **Detalierea studiului intreprins**

In ultima perioada au fost studiatii exponentii generalizati ai reprezentarilor ireductibile ale unei algebre Lie semisimple. Acesti exponenti generalizati au fost definiti de catre B. Kostant in 1963 in celebra sa lucrare ce trateaza reprezentarile algebrelor Lie pe spatii de polinoame; ei sunt invarianti importanti si subtili ai unei reprezentari ireductibile. Proprietatile lor, dar mai ales calcularea lor a ramas chiar dupa mai mult de 45 de ani o problema deschisa.

Conexiunea dintre aceasta problema si proiectul aflat in desfasurare este urmatoarea. Acesti exponenti generalizati pot fi definiti ca si coeficienti ai expansiunii unui caracter ireductibil in baza formata din functii sferice Macdonald si ca atare sunt q-deformari ale multiplicitatilor ponderilor unei reprezentari ireductibile. Acestea, si alte generalizari ale lor, sunt subiectul catorva conjecturi care au atras deosebit interes din partea specialistilor in ultimii 20 de ani. Printre alte lucruri, exponentii generalizati sunt exemple particulare de polinoame Kazhdan-Lusztig a caror calculare, la randul ei, este o problema deschisa.

Kostant a demonstrat ca exponentii corespunzatori reprezentarii adjuncte sunt exponentii clasici si algebrei Lie in chestiune (dublul acestora, plus o unitate sunt numerele Betti pentru grupul Lie compacte, importanti invarianti topologici) si a dat o formula explicita de calculare a lor. Dincolo de acest rezultat al lui Kostant nu se mai cunoste nici o formula ce poate fi folosita in practica pentru calcularea lor (Lusztig a obtinut o formula ce implica asa numita "Kostant q-partition function" dar aceasta formula este impracticabila din cauza faptului ca aceasta functie este deosebit de complicata chiar in cele mai simple cazuri) exceptie facand solutia completa pentru algebre Lie de tipul A data de Lascoux si Schutzenberger in 1978. Au existat numeroase incercari de a extinde aceasta formula la altle tipuri de algebre Lie inasa, surprinzator, nici un rezultat semnificativ a fost obtinut. In mare parte responsabil pentru aceste esecuri este faptul ca formula lui Lascoux si Schutzenberger este exprimata in functie de ceea ce ei au numit statistica charge, iar acesta statistica are o formulare (ca si demonstratia rezultatului) in termeni de combinatorica grupului de permutari si nu in termeni de notiuni care apar in mod obisnuit in teoria Lie (sisteme de radacini, ponderi, etc). Toate incercarile de a redefini statistica charge in limbaj Lie teoretic au esuat.

Scopul initial al cercetarilor intreprinse in acest proiect era sa obtinem o formula pentru exponentii generalizati care sa extinda formula data de Kostant pentru exponentii clasici. O asemenea formula, desi satisfacatoare din punct de vedere computational (spre deosebire de formula lui Lusztig), este departe de a fi optima deoarece implica inca un numar mare de termeni care se anuleaza reciproc. Aceasta formula a fost obtinuta in urma calcularii explicite ai coeficientilor Fourier pentru nucleul Cherednik.

Desi era departe de a fi predictibil la data initierii proiectului a fost posibila utilizarea acestei formula si obtinerea unei noi formule, fara termeni care se anuleaza (toti termenii sunt pozitivi), deci optima. Noua formula a necesitat introducerea a cateva noi idei si concepte precum notiunea de functie quasi-simetrica pentru sisteme de radacini arbitrare (in tipul A aceste functii quasi-simetrice devin polinoamele quasi-simetrice definite de Gessel in 1983). In tipul A noua formula s-a dovedit a coincide exact cu formula data de Lascoux si Schutzenberger.

Toate aceste rezultate au fost obtinute pentru asa numitele reprezentari mici. Cazul general ar trebui sa se reduca la aceasta situatie, dar in prezent detaliile lipsesc. In tipul A, acest procedeu este echivalent cu reductia de la tablouri Young sem-standard (ponderi generale) la tablouri Young standard (ponderi mici). Intr-adevar, examinand lucrarea initiala a lui Lascoux si Schutzenberger se observa ca statistica charge este definita mai intai pentru tablouri Young standard iar apoi extinsa aditiv la tablouri Young semi-standard prin descompunerea acestuia in cuvinte standard.

Rezultate:

- 1) Doua formule pentru exponentii generalizati ai reprezentarilor mici. Prima formula este o extindere a rezultatului lui Kostant pentru exponenti clasici. A doua formula realizeaza exponentii generalizati ca inaltimele quasi-ponderilor reprezentarii in chestiune. Ar trebui sa existe o a treia formula ce expliciteaza cea de-a doua formula in termeni de combinatorica unei formule mononiale pentru caractere (cum ar fi asa numita "path formula")
- 2) Un concept de functii quasi-simetrice pentru sisteme de radacini arbitrare (in tipul A acestea au fost definite de Gessel in 1983).

In cadrul obiectivului „clase speciale de coalgebre (probleme de tip splitting) si coringuri” am urmarit extinderea notiunii de integrala Haar din teoria grupurilor compacte sau mai general, al algebrelor Hopf intr-un cadru pur algebric al teoriei coalgebrelor. Dat fiind un grup compact  $G$  cu o masura Haar invarianta la translatii la stanga  $\mu$  si integrala asociata, se introduce in mod natural functiile reprezentative ale acestui grup care sunt in stransa legatura cu teoria reprezentarii grupului  $G$ . Pe multimea  $R(G)$  a functiilor reprezentative ale grupului  $G$  se poate introduce in mod natural o structura de algebra Hopf, in care multiplicarea este multiplicarea obisnuita a functiilor, iar comultiplicarea unei functii  $f$  este data de o formula mai speciala. Motivatia studiului conceptului de integrala intr-un context mai general este observatia ca singura structura care are de a face si codifica (in intregime) teoria reprezentarii grupului  $G$  este structura comultiplicativa, cea multiplicativa putand fi definita pentru orice multime  $G$  (nu numai pentru grupuri compacte).

Aceasta generalizare a notiunii de integrala din analiza functionala abstracta – teoria grupurilor local compacte – si de la algebrele Hopf – la coalgebre, a fost realizata cu succes. Rezultatele ce caracterizeaza algebrele Hopf co-Frobenius drept cele cu integrale nenule, precum si alte caracterizari echivalente, precum si rezultatele de unicitate a integralelor, s-au generalizat la co-algebre. Printre acestea se numara urmatorul rezultat ce generalizeaza si extinde cazurile mai sus amintite:  $C$  este o coalgebra co-Frobenius daca si numai daca dimensiunea spatiului integralelor pe un comodul este mai mare sau egala cu  $\dim(M)$  pentru orice comodul drept finit dimensional  $M$ . Mai mult, s-au gasit rezultate chiar mai generale, care functioneaza doar la stanga sau la dreapta (ex. o coalgebra co-Frobenius la stanga are o proprietate de unicitate a integralelor la stanga, existenta a integralelor la dreapta, s.a.). In particular, aceste integrale generalizate au interpretari concrete foarte interesante in cazul grupurilor compacte, si au drept consecinta alte rezultate de existenta si unicitate ale integralelor vectoriale pe grupuri compacte ce au un anumit tip de quantum-invarianta (invarianta generalizata), in care translatarea la stanga, in loc de a o lasa constanta, schimba integrala unei functii cu un factor ce depinde numai de factorul de translatare; invarianta clasica este un caz particular al acestei invariante controlate de un quantum-factor. Totodata o serie larga de exemple este construita in acest articol.

Un alt aspect important in aceeasi tematica generala il reprezinta rezultatele din [1] (articol in curs de publicare). Aici se demonstreaza ca notiunea generala de coalgebra quasi-co-Frobenius (QcF) are o caracterizare echivalenta foarte asemanatoare cu cea de recenta obtinuta pentru coalgebrele co-Frobenius de M.C.Iovanov si in perfecta analogie (dualitate) cu cea a algebrelor Frobenius finit dimensionale: o coalgebra  $C$  este QcF daca si numai daca  $C$  este izomorfa intr-un sens mai slab cu dualul sau rational la stanga  $\text{Rat}(C\_C)$  (echivalent la dreapta), in sensul ca anumite puteri (ca suma directa sau ca produs direct) ale acestor obiecte sunt izomorfe ca si comodule (sau ca module). Aceasta caracterizare ofera posibilitatea extinderii si a caracterizarilor categoricale ale algebrelor Frobenius (si coalgebrelor co-Frobenius). Aceasta caracterizare simetrica in spiritul celor ale algebrelor Frobenius, coalgebrelor co-Frobenius si a algebrelor Hopf cu integrale nenule, se dovedeste a avea aplicatii la algebrele Hopf: rezultate fundamentale din acest domeniu care sunt date de caracterizarile echivalente din acest caz, care afirma ca o algebra Hopf este co-Frobenius la dreapta este echivalent cu oricare din conditiile QcF la dreapta, semiperfecta, cu parte rationala nenula la dreapta, cu integrale drepte nenule sau cu aceleasi conditii la stanga se obtin imediat ca si consecinte ale acestor rezultate asupra coalgebrelor QcF care pot fi privite ca generalizari ale algebrelor Frobenius. Mai mult, unicitatea integralelor rezulta implicit din aceste rezultate, impreuna cu un alt rezultat celebru fundamental al teoriei algebrelor Hopf care afirma ca intr-o algebra Hopf cu integrale antipodul este bijectiv, rezultat la care gasim o

demonstratie scurta bazata pe tehnici legate de teoria reprezentarilor: proprietati ale modulelor si comodulelor. Aceasta demonstratie noua este foarte promitatoare, intrucat deja pare sa aiba consecinte neasteptate: s-a demonstrat un fapt mai general – tot in cadrul acestui proiect – in articolul [5], si anume ca antipodul unei algebre „dual quasi-Hopf” (o generalizare a algebrelor Hopf introdusa de Drinfel'd din motive ce au de a face cu mecanica cuantica) cu integrale este bijectiv. Aici, incercarile precedente de a adapta tehnicile din demonstratia clasica a lui Radford a bijectivitatii antipodului nu au dat rezultate, lucru care da importanta acestei noi demonstratii a acestui fapt clasic.

Pe de alta parte, semnalam (aproape) finalizarea procesului de publicare a unui alt articol, legat de asemenea de teoria coalgebrelor si comodulelor, [1] impreuna cu C.Nastasescu si cu Blas Torrecillas Jover (Universitatea din Almeria), care raspunde la o problema deschisa importanta in teoria generala a studiului categoriei modulelor (reprezentarilor) asociate unui inel. In general, dat fiind un inel  $A$  si categoria de module asociata, de multe ori este convenabil sa studiem o anumita parte de torsiune a modulelor asociata intr-un mod canonic. De exemplu, acesta este cazul grupurilor abeliene cu partea de torsiune clasica. Daca aceasta este sumand direct intr-un anumit obiect, atunci avem o modalitate buna de intelegere a obiectului respectiv. In cazul unei categorii generale si a unui anumit „functor de torsiune” se pune astfel problema daca suntem in situatia ca orice obiect sa se poate descompune intr-o suma directa intre partea de torsiune si un alt obiect, putand astfel fi mult mai usor inteles. Articolul in cauza da un raspuns explicit acestui tip de intrebare pentru cazul important al algebrelor profinite (echivalent algebre care sunt dualul unei coalgebre) si asa numita torsiune generala Dickson, o torsiune naturala care exista in orice categorie Grothendieck, si deci si in categoria de module peste un inel. Mai precis, se raspunde pozitiv in acest caz la o conjectura care afirma ca daca acest tip de proprietate are loc pentru algebra  $A$ , atunci ea incesi trebuie sa fie un obiect de „torsiune” in raport cu aceasta torsiune Dickson, echivalent, este semiartiniana. Tot in aceasta clasa a problemelor de tip splitting – prevazute de altfel in etapele proiectului nostru pe 2008 – se gasesc rezultatele din [4], care studiaza problema splitting-ului in raport cu partea rationala a unui modul; anume, in cazul unei algebre profinite  $A$ , se pune problema cand partea de torsiune rationala (in linii mari, partea de torsiune rationala este suma submodulelor de torsiune finit dimensionale) a oricarui modul stang finit generat este un sumant direct in acel modul. Rezultatul principal – completat de o serie de alte rezultate conexe si exemple – arata ca o astfel de algebra trebuie sa fie domeniu de valuare discreta daca este infinit dimensionala (altfel, problema devine triviala).

In acelasi timp, s-a finalizat cu succes un articol publicat [2] impreuna cu J. Vercauysse, in care se trateaza o problema generala a exprimarii si unificarii tuturor conceptelor de tip co-Frobenius intr-un context functorial categoric; acesta este obtinut pe baza unei abordari mai generale ce implica folosirea contextelor Morita. Aceasta lucrare este deja citata intr-un studiu legat de acelasi subiect, a unor autori straini. Tot in aceeasi directie a obiectelor de tip Frobenius s-a finalizat publicarea unui alt articol [3]; aici sunt generalizate o serie de concepte cum ar fi extinderile Frobenius de inele, coring-urile Frobenius si anumiti functori Frobenius intr-o singura notiune de extindere Frobenius de coring-uri. Se obtin rezultate de caracterizare a acestor extinderi de coring-uri, iar rezultatele existente in cazurile particulare amintite se obtin drept cazuri particulare. Mai mult, se obtin si anumite rezultate de finitudine ale extinderilor Frobenius de coringuri, cu aplicatii mai ales la algebre, care explica modul in care rezultate acestea de finitudine apar atat la extinderile Frobenius de inele cat si la coring-urile Frobenius.

In cadrul obiectivului „Produs general la nivel de algebre si grupuri cuantice: probleme de structura si clasificare” a fost trimis spre publicare articolul [6]. Pentru doua grupuri fixate au

fost definite trei categorii avand drept obiecte produsele crossed intre cele doua grupuri. Prima dintre aceste categorii este chiar interpretarea categoricala a problemei clasice a extinderilor iar celelate doua sunt generalizari ale acestei probleme. Astfel, problema clasificarii extinderilor de grupuri devine echivalenta cu problema descrierii scheletului acestor categorii. Rezultatul principal obtinut il constituie o teorema de tip Schreier ce descrie scheletul uneia dintre categoriile considerate. Toate rezultatele obtinute impreuna cu o lista de 7 probleme ramase in lucru se regasesc in articolul [6]. De asemenea am inceput constructia unui nou tip de produs ce generalizeaza atat produsul crossed cat si produsul bicrossed la nivel de grupuri. Au fost obtinute rezultate ce generalizeaza teoria existenta pentru cele doua tipuri de produse de grupuri mentionate mai sus. Acest articol [4] (din lista celor trimise spre publicare) este in faza finala de finisare si va fi trimis spre publicare in cursul acestui an. In a doua jumatate a anului 2008 va fi demarata si scrierea monografiei *Introducere in algebra necomutativa*.

Tinerii studenti ai proiectului (Ana Agore si Dragos Fratila) au efectuat primele stagii de cercetare (ambii o luna in SUA si Dragos Fratila 10 zile in Franta). Pe parcursul sederii in SUA au studiat teoria reprezentarii grupurilor finite si algebre Frobenius. S-a incercat dezvoltare unei teorii a caracterelor pentru algebre Frobenius care sa inglobeze in ea teoria caracterelor pentru algebrele semisimple, in particular pentru algebra grupala complexa. Rezultatele partiale obtinute au fost inspirate si de lucrarea Max Neunhoeffler, Sarah Scherotzke - "Formulas for primitive Idempotents in Frobenius Algebras and an Application to Decomposition maps". Notiunea de caracter nu mai este identica cu cea din cazul clasic al grupurilor sau algebrele semisimple, impedimentul fiind existenta modulelor indecompozabile care nu sunt ireductibile (adica a unei "parti" ne-semisimple a algebrei). Am considerat niste baze mai speciale ale algebrei care pun in relatie soclul, radicalul acesteia si structura de algebra Frobenius cu ajutorul carora am definit caracterele. In cazul semisimplu, definitia devine cea clasica. Speram sa obtinem niste rezultate care sa generalizeze teoria caracterelor pentru algebre semisimple. La Grenoble am studiat reprezentari de tip finit ale grafurilor orientate (quivers) si clasificarea acestora data de teorema lui Gabriel. De asemenea am inceput si studiul algebrele Hall asociate categoriilor abeliene finite.

## Concluzii:

**Consideram ca toate obiectivele si activitatile asumate in etapa 2008 a proiectului de cercetare au fost indeplinite si depasite in ceea ce priveste realizarile din criteriile de performanta chiar in primele 6 luni ale anului cand facem acest raport.** In aceasta etapa, prin contract (anexa II b) a fost stabilit ca vom publica doua articole (unul in reviste cotate ISI si unul in reviste necotate ISI) in acest moment, la jumatatea anului 2008, putem raporta ca avem **3 articole publicate deja in reviste cotate ISI, un altul este in curs de publicare** si alte 6 articole sunt trimise spre publicare.

Director de proiect

Bucuresti, 1 iulie 2008

Prof. dr. Gigel Militaru